Université Libre de Bruxelles **Examen d'admission**
Mathématiques **3 Juin 2020**

Nom	
Prénom	
Numéro	

Consignes

- Écrivez immédiatement votre nom, prénom et numéro sur cette page et sur toutes les pages.
- Les brouillons ne seront corrigés en aucun cas.
- Ne dégrafez pas les feuilles.
- Justifiez vos réponses en explicitant clairement tous les calculs et raisonnements ! Sauf indiqué explicitement, la réponse ne sera pas corrigée sans justification !
- Écrivez lisiblement et soignez la présentation de vos réponses.
- N'utilisez pas la couleur rouge dans vos réponses
- Si vous n'avez pas suffisamment de place pour votre réponse, vous pouvez continuer sur une autre page mais il faut l'indiquer clairement !

Question	1	2	3	4	Total
Note	/25	/20	/25	/10	/80

/20

1. Algèbre. (a) Déterminez tous les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que (10 points)

$$\begin{cases} 5x &= 2y - 1 \\ 2y &= 1 - 3x \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{cases} 5x &= 2y-1 \\ 2y &= 1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x &= (1-3x)-1 = -3x \\ 2y &= 1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x &= 0 \\ 2y &= 1-3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ 2y &= 1-3\cdot 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions: $\{(0, \frac{1}{2})\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) Considérons le polynôme $p(x) = 2x^2 - 3x - 1$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$, on a $p(x+1) < 0$? (10 points)

Solution. Calculons d'abord

$$\begin{aligned} p(x+1) &= 2(x+1)^2 - 3(x+1) - 1 = 2(x^2+2x+1) - 3x - 3 - 1 \\ &= 2x^2 + (4-3)x + (2-3-1) = 2x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

Calculons les racines de cette polynôme quadratique. Le discriminant est

$$D = 1 - 4.2.(-2) = 17$$

Les racines x_1, x_2 sont donc

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

Nous trouvons donc pour la fonction $p(x+1)$:

x		$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$		$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$	
$p(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions: $\left]\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right[$.

(c) Écrivez l'expression suivante comme une fraction non simplifiable avec des puissances entières positives. (5 points)

$$z^{-2}\left(\frac{(-x)^{\frac{1}{3}}y^{-1}z}{x^{-1}y^{-\frac{2}{3}}(-z)^3}\right)^{-3} =$$

Solution.

$$\begin{aligned} z^{-2}\left(\frac{(-x)^{\frac{1}{3}}y^{-1}z}{x^{-1}y^{-\frac{2}{3}}(-z)^3}\right)^{-3} &= \frac{1}{z^2}\,\frac{(-x)^{\frac{-3}{3}}y^3z^{-3}}{x^3y^{\frac{6}{3}}(-z)^{-9}} = \frac{1}{z^2}\,\frac{(-x)^{-1}y^3z^{-3}}{x^3y^2(-z)^{-9}} \\ &= \frac{1}{z^2}\,\frac{-x^{-1}y^3z^{-3}}{-x^3y^2z^{-9}} = \frac{y^3z^9}{xx^3y^2z^2z^3} \\ &= \frac{yz^4}{x^4} \end{aligned}$$

2. Statistique. Pendant les 10 premiers jours de mai, Jean a compté durant une heure combien d'oiseaux il voit dans son jardin. Voici le résultat:

jour	1 mai	2 mai	3 mai	4 mai	5 mai	6 mai	7 mai	8 mai	9 mai	10 mai
nombre d'oiseaux	12	9	15	9	13	12	11	5	10	14

Calculez
(a) la moyenne,
(b) le médiane
(c) la variance
(d) l'écart-type.

(20 points)

Solution.
(a) Moyenne: $\overline{x} = \frac{12+9+15+9+13+12+11+5+10+14}{10} = \frac{110}{10} = 11.$
(b) Médiane: mettrons les données en ordre croissant:

$$5, 9, 9, 10, \underline{11, 12}, 12, 13, 14, 15.$$

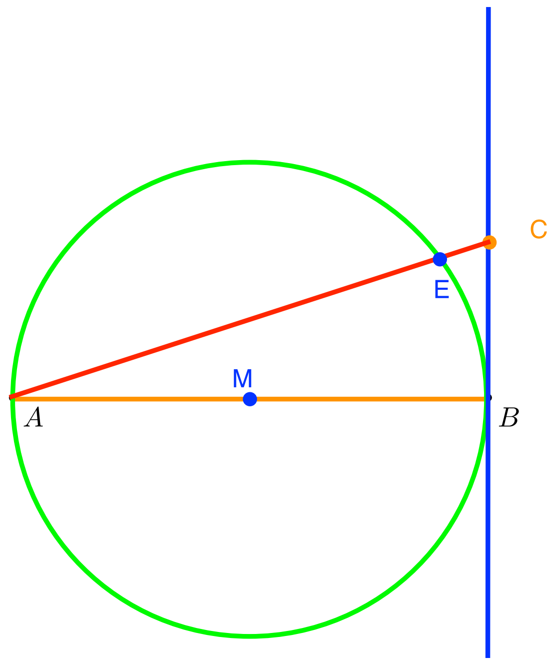
La médianne est donc: $\frac{11+12}{2} = 11,5.$
(c) La variance. Pour toute donnée x_i, nous calculons $(x_i - \overline{x})^2$ et nous calculons la moyenne des résultats:

x_i	12	9	15	9	13	12	11	5	10	14
$x_i - \overline{x}$	1	-2	4	-2	2	1	0	-6	-1	3
$(x_i - \overline{x})^2$	1	4	16	4	4	1	0	36	1	9

La variance est donc: $\frac{1+4+16+4+4+1+0+36+1+9}{10} = \frac{76}{10} = 7,6.$
(d) L'écart-type est la racine de la variance, et conc l'écart-type est: $\sqrt{7,6} = 2,76$ (arrondi à 2 décimales)

3. Géométrie. On considère dans le plan euclidien deux points A et B. Soit M le point central du segment $[A, B]$. Soit C un point tel que les droites AB et BC sont orthogonales (= perpendiculaires), et $|AB| = 3|BC|$ (ici, $|AB|$ dénote la distance entre le point A et le point B). Soit E le point d'intersection (différent à A) entre la droite AC et le cercle de centre M et de rayon $|BM|$.
   (a) Complétez l'image de cette situation (un croquis suffit). (10 points)
   (b) Calculez $\frac{|AE|}{|BC|}$ (15 points)

(a)



(b) Le triangle ABC est rectangulaire en B. Par le théorème de Pythagore, nous trouvons alors:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = (3|BC|)^2 + |BC|^2 = 10|BC|^2$$

et donc

$$|AC| = \sqrt{10}|BC|.$$

Comme les trois points A, B, E se trouvent sur le même cercle, et AB contient le centre du cercle, $A\hat{E}B$ est un angle droite. Donc $A\hat{E}B = A\hat{B}C$. De plus, $E\hat{A}B = B\hat{A}C$, donc les triangles AEB et ABC sont similaires. Donc

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

Alors

$$|AE| = \frac{|AB|^2}{|AC|} = \frac{(3|BC|)^2}{\sqrt{10}|BC|} = \frac{9}{\sqrt{10}}|BC|$$

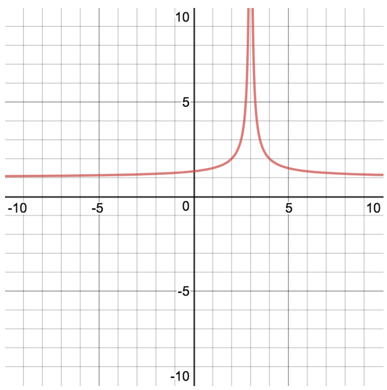
Donc

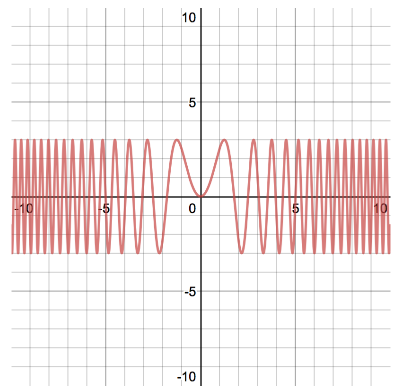
$$\frac{|AE|}{|BC|} = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

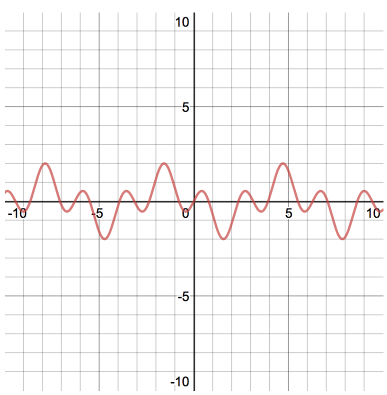
4.Analyse. Lesquels de ces graphes (a)-(f) correspondent à une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes ? Complétez le tableau suivant avec "V" (vrai) et "F" (faux). Pour chacune des propriétés, il y a un ou plusieurs graphes qui correspondent; le même graphe peut satisfaire plusieurs des propriétés. Pour cette question, il ne faut pas donner de justification.

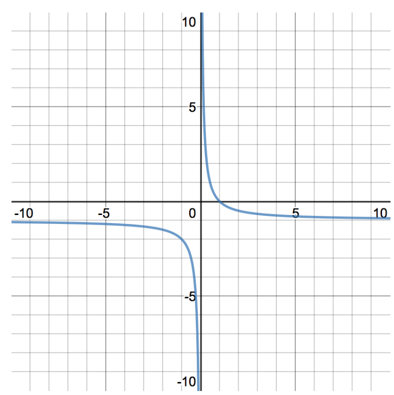
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
fonction paire	F	V	F	F	F	F
fonction impaire	F	F	V	F	F	F
fonction périodique	F	F	V	F	F	F
fonction qui a 3 dans son domaine	F	V	V	V	V	V
fonction qui a 1 dans son image	V	F	F	V	V	F

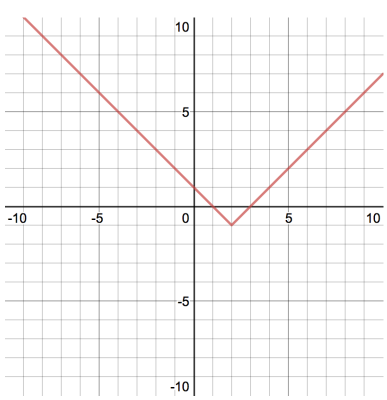
(10 points)

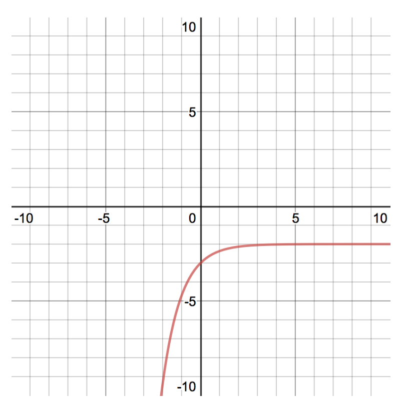
(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


Brouillon - cette page ne sera pas corrigée

Brouillon - cette page ne sera pas corrigée